1.3.20 Dláždění III

Předpoklady: 010319

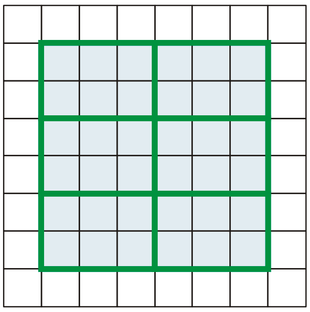
Př. 1: Najdi $n(84,96)$, $D(84,96)$.

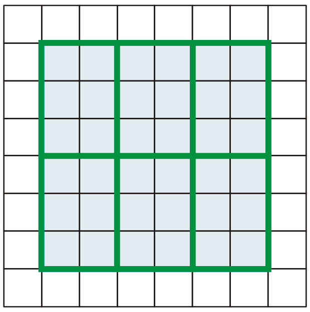
$84 = 4 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$
$96 = 3 \cdot 32 = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$D(84,96) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ (společné části rozkladů)
$n(84,96) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 672$ (nejmenší rozklad, do kterého se schovají oba rozklady).

Opakování z minulé hodiny:

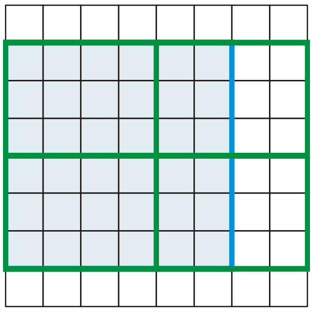
- Při dláždění obdélníků hledáme takové dlaždice, jejichž rozměr je dělitelem obou rozměrů obdélníku.

Př. 2: Nakresli na čtverečkovaný papír čtverec 6 x 6. Je možné ho vydláždit obdélníkovými dlaždicemi o rozměrech 2 x 3 cm? Nakresli jak. Kolik dlaždic budeme potřebovat? Je možné čtverec 6 x 6 vydláždit dlaždicemi 4 x 3?





Obě možnosti, představují to samé dláždění, obrázky jsou jen otočené o $90°$.
Potřebujeme $2 \cdot 3 = 6$ dlaždic.
Dlaždicemi 4 x 3 čtverec 6 x 6 nevydláždíme.



Jednu stranu můžeme pokrýt dvě dlaždicemi (stranou s rozměrem 3), ale na druhou stranu rozměr dlaždice 4 nevyjde (jedna je málo, dvě jsou moc).

Pedagogická poznámka: Někteří žáci pochopí, že jde o dělitelnost ihned jiní až v průběhu dalšího příkladu. Nikdy to však neříkáme dřív ne při kontrole následujícího příkladu.

Př. 3: Máme čtvercovou plochu 12 x 12. Rozhodni, zda ji můžeme vydláždit obdélníkovými dlaždicemi o rozměrech:
a) 2 x 3 b) 3 x 4 c) 2 x 8 d) 3 x 5 e) 4 x 7
Hledej pravidlo, podle kterého je možné i bez kreslení rozhodnout, jaký typ dlaždic je použitelný.

Dláždíme čtverec 12 x 12.
a) dlaždice 2 x 3
12 je dělitelné 2 i 3 $\Rightarrow$ čtverec 12 x 12 můžeme vydláždit dlaždicemi 2 x 3.

b) dlaždice 3 x 4
12 je dělitelné 2 i 4 $\Rightarrow$ čtverec 12 x 12 můžeme vydláždit dlaždicemi 3 x 4.

c) dlaždice 2 x 8
12 není dělitelné 8 $\Rightarrow$ čtverec 12 x 12 nemůžeme vydláždit dlaždicemi 2 x 8.

d) dlaždice 3 x 5
12 není dělitelné 5 $\Rightarrow$ čtverec 12 x 12 nemůžeme vydláždit dlaždicemi 3 x 5.

e) dlaždice 4 x 7
12 není dělitelné 7 $\Rightarrow$ čtverec 12 x 12 nemůžeme vydláždit dlaždicemi 4 x 7.

Pro dláždění čtverce můžeme použít pouze dlaždice, jejichž oba rozměry jsou děliteli rozměru čtverce.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu je důležitý bod c). Občas se objeví žák, který rozhoduje o tom, zda je možné dláždit, přes obsahy. Spočte obsah čtverce i dlaždice a pokusí se je vydělit.Tímto postupem zjistí, že je možné čtverec 12 x 12 dlaždicí 2 x 8 vydláždit, ačkoliv z obrázku (který si na mou výzvu nakreslí) je okamžitě zřejmé, že to možné není.

Př. 4: Máme čtvercovou plochu o rozměrech 20 x 20. Rozhodni, které z následujících obdélníkových dlaždic můžeme použít na její vydláždění:
a) 2 x 3 b) 2 x 5 c) 4 x 5 d) 4 x 6
Pokud dlaždice použít můžeme, urči, kolik jich budeme potřebovat.

Dláždíme čtverec 20 x 20.
a) dlaždice 2 x 3
20 není dělitelné 3 $\Rightarrow$ čtverec 20 x 20 nemůžeme vydláždit dlaždicemi 2 x 3.

b) dlaždice 2 x 5
20 je dělitelné 2 i 5 $\Rightarrow$ čtverec 20 x 20 můžeme vydláždit dlaždicemi 2 x 5.
Počty dlaždic: první směr: $20:2=10$, druhý směr: $20:5=4$ $\Rightarrow$ celkem potřebujeme $10\cdot 4=40$ dlaždic.
Kontrola přes obsah: Obsah čtverce: $20\cdot 20=400$, obsah dlaždice $2\cdot 5=10$, obsah 40 dlaždic: $40\cdot 10=400$.

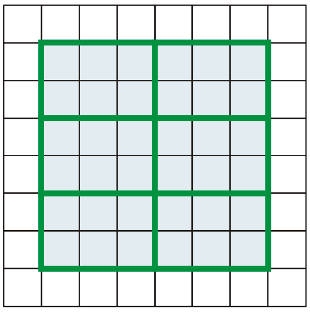
c) dlaždice 4 x 5
20 je dělitelné 4 i 5 $\Rightarrow$ čtverec 20 x 20 můžeme vydláždit dlaždicemi 4 x 5.

Počty dlaždic: první směr: $20:4=5$, druhý směr: $20:5=4$ $\Rightarrow$ celkem potřebujeme $5\cdot 4=20$ dlaždic.
Kontrola přes obsah: Obsah čtverce: $20\cdot 20=400$, obsah dlaždice $4\cdot 5=20$, obsah 20 dlaždic: $20\cdot 20=400$.

d) dlaždice 4 x 6
20 není dělitelné 6 $\Rightarrow$ čtverec 20 x 20 nemůžeme vydláždit dlaždicemi 4 x 6.

Př. 5: Obdélníkovými dlaždicemi o rozměrech 2 x 3 máme vydláždit co nejmenší možný čtverec. Jak dlouhá bude strana čtverce? Kolik dlaždic budeme potřebovat? Nakresli obrázek na čtverečkovaný papír.

Skládáme dlaždice k sobě tak, aby vytvořily čtverec.



Nejmenší čtverec má stranu o délce 6 (jednu stranu složíme ze tří, druhou ze dvou dlaždic), potřebujeme 6 dlaždic.
Hledaná strana čtverce musí být násobkem obou rozměrů dlaždice $\Rightarrow$ hledáme společný násobek obou rozměrů (a to ten nejmenší).

Př. 6: Obdélníkovými dlaždicemi o rozměrech 4 x 6 máme vydláždit co nejmenší možný čtverec. Jak dlouhá bude strana čtverce? Kolik dlaždic budeme potřebovat?

Strana čtverce musí být násobkem 4 a 6 $\Rightarrow$ nejmenší takové číslo je 12.
Nejmenší dlážděný čtverec bude mít rozměr 12 x 12.
Potřebujeme: jeden rozměr $12:4=3$, druhý rozměr $12:6=2$ $\Rightarrow$ potřebujeme $3\cdot 2=6$ dlaždic.
Kontrola přes obsahy: Obsah čtverce $12\cdot 12=144$, obsah dlaždice $4\cdot 6=24$, obsah 6 dlaždic: $6\cdot 24=144$.

Pedagogická poznámka: V předchozích dvou příkladech se u některých žáků zrychleně zopakuje vývoj, kterým jsme prošli u hry Tleskni, dupni. Nejdříve hypotéza o tom, že rozměr čtverce je součinem obou rozměrů dlaždice a poté korekce při příkladu, který tuto hypotézu vyvrací.

Pedagogická poznámka: V následujícím příkladu je povolena kalkulačka.

Př. 7: Řeš předchozí příklad pro dlaždice o rozměrech:
a) 4 cm x 8 cm b) 2,4 m x 3,6 m c) 0,12 m x 0,16 m
d) 6,4 cm x 9,6 cm e) 132 cm x 180 cm
Počty dlaždic urči pouze u dvou prvních bodů. Výsledky sepiš do přehledné tabulky.

Hledáme rozměry nejmenšího dlážditelného čtverce $\Rightarrow$ hledáme nejmenší společná násobek rozměrů dlaždice.

a) 4 cm x 8 cm
Nejmenší společný násobek je 8 $\Rightarrow$ potřebujeme dvě dlaždice.

b) 2,4 m x 3,6 m
Rozměry převedeme na dm, abychom se zbavili desetinných čísel $\Rightarrow$ dlaždice 24 x 36.
$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
Nejmenší společný násobek (obsahuje oba rozklady): $n(24,36) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$.
Hledaný čtverec má rozměry 72 x 72.
Potřebujeme: jeden rozměr $72 : 24 = 3$ dlaždice, druhý rozměr $72 : 36 = 2$ dlaždice, celkem $3 \cdot 2 = 6$ dlaždic.
Kontrola přes obsahy: Obsah čtverce $72 \cdot 72 = 5184$, obsah dlaždice $24 \cdot 36 = 684$, obsah 6 dlaždic: $6 \cdot 684 = 5184$.

c) 0,12 m x 0,16 m
Rozměry převedeme na cm, abychom se zbavili desetinných čísel $\Rightarrow$ dlaždice 12 x 16.
$12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
$16 = 4 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
Nejmenší společný násobek (obsahuje oba rozklady): $n(12,16) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$.
Hledaný čtverec má rozměry 48 x 48.
Potřebujeme: jeden rozměr $48 : 12 = 4$ dlaždice, druhý rozměr $48 : 16 = 3$ dlaždice, celkem $4 \cdot 3 = 12$ dlaždic.
Kontrola přes obsahy: Obsah čtverce $48 \cdot 48 = 2304$, obsah dlaždice $12 \cdot 16 = 192$, obsah 12 dlaždic: $12 \cdot 192 = 2304$.

d) 6,4 cm x 9,6 cm
Rozměry převedeme na mm, abychom se zbavili desetinných čísel $\Rightarrow$ dlaždice 64 x 96.
$64 = 8 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$
$96 = 3 \cdot 32 = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3$
Nejmenší společný násobek (obsahuje oba rozklady): $n(64,96) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 192$.
Hledaný čtverec má rozměry 192 x 192.
Potřebujeme: jeden rozměr $192 : 64 = 3$ dlaždice, druhý rozměr $192 : 96 = 2$ dlaždice, celkem $2 \cdot 3 = 6$ dlaždic.
Kontrola přes obsahy: Obsah čtverce $192 \cdot 192 = 36864$, obsah dlaždice $64 \cdot 96 = 6144$, obsah 6 dlaždic: $6 \cdot 6144 = 36864$.

e) 132 cm x 180 cm
$132 = 3 \cdot 44 = 3 \cdot 4 \cdot 11 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$
$180 = 10 \cdot 18 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
Nejmenší společný násobek (obsahuje oba rozklady): $n(132,180) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 1980$.

Hledaný čtverec má rozměry 1980 x 1980.
Potřebujeme: jeden rozměr $1980:132=15$ dlaždice, druhý rozměr $1980:180=11$ dlaždice, celkem $15\cdot 11=165$ dlaždic.
Kontrola přes obsahy: Obsah čtverce $1980\cdot 1980=3\,920400$, obsah dlaždice $132\cdot 180=23760$, obsah 165 dlaždic: $165\cdot 2370=3920400$.

rozměry dlaždice	4 x 8	2, 4 x 3, 6	0,12 x 0,16	6,4 x 9,6	132 x 180
rozměr čtverce	8 x 8	7,2 x 7,2	0,48 x 0,48	19,2 x 19,2	1980 x 1980
počet dlaždic	2	6	12	6	165

Př. 8: Máme obdélník 15 x 12. Rozhodni, které z následujících dlaždic můžeme použít na jeho vydláždění.
a) 2 x 3 b) 2 x 5 c) 4 x 5 d) 4 x 6
Pokud je možné dlaždice použít, urči, kolik jich na dláždění bude potřeba.

Obdélník 15 x 12.
a) 2 x 3
Obě strany obdélníku musíme sestavit buď z jednoho nebo druhého rozměru dlaždic.
- 15 je dělitelné 3 ($15:3=5$)
- 12 je dělitelné 2 ($12:2=6$)

Obdélník 15 x 12 je možné vydláždit $5\cdot 6=30$ dlaždicemi 2 x 3.

b) 2 x 5
Obě strany obdélníku musíme sestavit buď z jednoho nebo druhého rozměru dlaždic.
- 15 je dělitelné 5 ($15:5=3$)
- 12 je dělitelné 2 ($12:2=6$)

Obdélník 15 x 12 je možné vydláždit $3\cdot 6=18$ dlaždicemi 2 x 5.

c) 4 x 5
Obě strany obdélníku musíme sestavit buď z jednoho nebo druhého rozměru dlaždic.
- 15 je dělitelné 5 ($15:5=3$)
- 12 je dělitelné 4 ($12:4=3$)

Obdélník 15 x 12 je možné vydláždit $3\cdot 3=9$ dlaždicemi 4 x 5.

d) 4 x 6
Obě strany obdélníku musíme sestavit buď z jednoho nebo druhého rozměru dlaždic.
15 není dělitelné ani 4 ani 6 $\Rightarrow$ obdélník 15 x 12 není možné vydláždit dlaždicemi 4 x 6.

Pedagogická poznámka: Typický první názor nejrychlejších žáků, kteří se k příkladu dostanou je, že žádná z dlaždic nevyhovuje. Dělitelnost kontrolují pouze v pořadí, které je v zadání a vůbec je nenapadne, že si dlaždice mohou libovolně otočit.

Př. 9: Projdi si všechny tři hodiny, ve kterých jsme dláždili a sepiš výsledky, ke kterým jsme dospěli.

Pedagogická poznámka: Řešení posledního příkladu v následující hodině.

Shrnutí: Při dláždění nejmenšího čtverce obdélníkovou dlaždicí hledáme nejmenší společný násobek.